

10 On considère un triangle ABC tel que :

$$AB=9, BC=4 \text{ et } AC=7$$

Calculer une mesure en degré des angles du triangle ABC (on arrondira au degré près).

Thm Al-kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$16 = 81 + 49 - 2 \times 9 \times 7 \times \cos \hat{A}$$

$$16 = 130 - 126 \cos \hat{A}$$

$$130 - 126 \cos \hat{A} = 16$$

$$-126 \cos \hat{A} = 16 - 130 = -114$$

$$\cos \hat{A} = \frac{-114}{-126}$$

$$\hat{A} \simeq 25^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \hat{C}$$

$$81 = 49 + 16 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos \hat{C}$$

$$81 = 65 - 56 \cos \hat{C}$$

$$65 - 56 \cos \hat{C} = 81$$

$$-56 \cos \hat{C} = 81 - 65 = 16$$

$$\cos \hat{C} = \frac{16}{-56}$$

$$\hat{C} \simeq 107^\circ$$

$$\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C})$$

$$\simeq 180 - (25 + 107)$$

$$\simeq 180 - 132$$

$$\simeq 48^\circ$$

11 On considère un triangle ABC tel que :
 $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$

1. Calculer la longueur BC .
2. Calculer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$.

1) Thm d'Al-Kasbi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{A} \\ &= 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 30^\circ \\ &= 52 - 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$BC^2 = 52 - 24\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$$

2) Thm d'Al-Kasbi :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \widehat{B} \\ 36 &= 16 + 52 - 24\sqrt{3} - 2 \times 4 \times \sqrt{52 - 24\sqrt{3}} \cos \widehat{B} \\ 36 &= 68 - 24\sqrt{3} - 8\sqrt{52 - 24\sqrt{3}} \cos \widehat{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68 - 24\sqrt{3} - 8\sqrt{52 - 24\sqrt{3}} \cos \widehat{B} &= 36 \\ -8\sqrt{52 - 24\sqrt{3}} \cos \widehat{B} &= 36 - 68 + 24\sqrt{3} \\ &= -32 + 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{B} &= \frac{-32 + 24\sqrt{3}}{-8\sqrt{52 - 24\sqrt{3}}} \\ \widehat{B} &\approx 111,7^\circ \end{aligned}$$

12 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(6;3)$ et $C(-4;-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} -4 \\ -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} * \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 \times (-4) + (-1) \times (-6) \\ &= -24 + 6 = -18 \end{aligned}$$

$$* \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$AB = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

$$AC = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$$

RON $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Alors $\sqrt{37} \times \sqrt{52} \times \cos \hat{A} = -18$

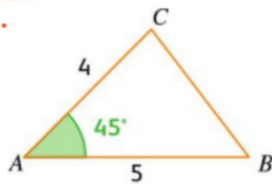
$$\cos \hat{A} = \frac{-18}{\sqrt{37} \times \sqrt{52}}$$

$$\hat{A} \simeq 114,2^\circ$$

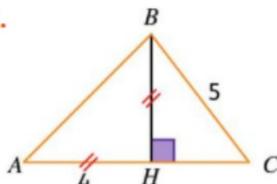
nº 45, 46, 47, 48, 54, 56 p. 257.

45

1.



2.



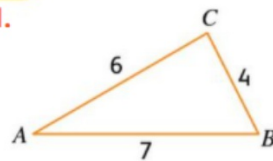
$$\begin{aligned} 1) \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 5 \times 4 \times \cos 45^\circ \\ &= 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \vec{AH} \cdot \vec{AC} \\ &= AH \times AC \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{P.H. do } BHC. \\ BC^2 = HC^2 + HB^2 \\ HC^2 = 25 - 16 = 9 \\ HC = 3. \text{ de } AC = 4 \end{array} \right\}$$

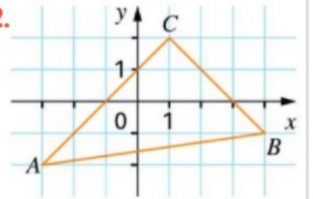
$$\text{de } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 3 = 12$$

46

1.



2.

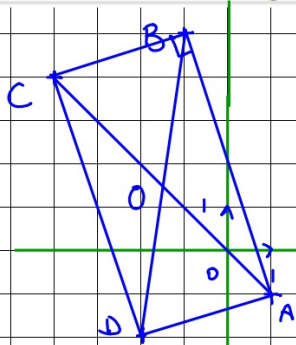


$$\begin{aligned} 1) \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ &= \frac{1}{2} (49 + 36 - 16) \\ &= \frac{69}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{AB} &\begin{vmatrix} 7 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \vec{AC} &\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \times 1 + 1 \times 4 = 7 + 4 = 11$$

47 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;-1)$, $B(-1;5)$ et $C(-4;4)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. On note O le centre de ce quadrilatère. En calculant de deux façons le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, calculer une mesure arrondie au degré près de $\widehat{AOB}$.



$A(1; -1)$
 $B(-1; 5)$
 $C(-4; 4)$
 $D(-2; -2)$

on a aussi $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$

$$-\frac{31}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \cos(\widehat{AOB})$$

$$\frac{25}{2} \times \cos \widehat{AOB} = -\frac{31}{4} \quad \text{dc} \quad \cos \widehat{AOB} = -\frac{31}{50}$$

 d'où $\widehat{AOB} \approx 128^\circ$

1) $\vec{BA} \begin{vmatrix} 2 \\ -6 \end{vmatrix} \quad \vec{BC} \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \end{vmatrix}$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2 \times (-3) + (-6) \times (-1) = -6 + 6 = 0$$

ainsi $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$ st orthogonaux
 d'où ABC est en P_2 .

2) $ABCD$ ppm $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$

$D(x; y) \quad \vec{AD} \begin{vmatrix} x-1 \\ y+1 \end{vmatrix} \quad \vec{BC} \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \end{vmatrix}$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -3 \\ y+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \quad D(-2, -2)$$

$ABCD$ ppm avec un angle obt $\widehat{ABC}$, c'est dc un rectangle.

3) O centre de $ABCD$ dc mil de $[AC]$ et $[BD]$.

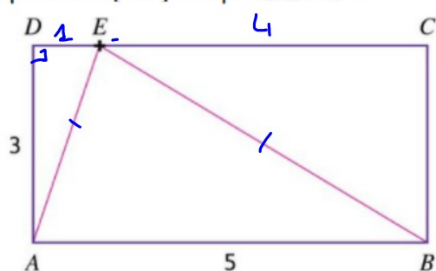
$O\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) \quad O\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\vec{OA} \begin{vmatrix} 5/2 \\ -5/2 \end{vmatrix} \quad \vec{OB} \begin{vmatrix} 1/2 \\ 7/2 \end{vmatrix}$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) \times \frac{7}{2} = \frac{5}{4} - \frac{35}{4} = -\frac{31}{4}$$

$OA = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad OB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

48 ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.
 E est le point de $[CD]$ tel que $DE = 1$.



1. En utilisant des décompositions vectorielles et la relation de Chasles, montrer que :

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} = \vec{ED} \cdot \vec{EC} + DA^2$$

2. En déduire la valeur du produit scalaire $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$.

3. Justifier alors que $\cos \widehat{AEB} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{AEB}$ (on donnera une valeur arrondie au degré près).

$$1) \vec{EA} = \vec{ED} + \vec{DA}$$

$$\vec{EB} = \vec{EC} + \vec{CB}$$

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} = (\vec{ED} + \vec{DA}) \cdot (\vec{EC} + \vec{CB})$$

$$= \vec{ED} \cdot \vec{EC} + \vec{ED} \cdot \vec{CB} + \vec{DA} \cdot \vec{EC} + \vec{DA} \cdot \vec{CB}$$

$$(ED) \perp (CB) \text{ dc } \vec{ED} \cdot \vec{CB} = 0 \quad \vec{DA} \perp \vec{CB} \text{ dc } \vec{DA} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$(DA) \perp (EC) \text{ dc } \vec{DA} \cdot \vec{EC} = 0$$

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} = \vec{ED} \cdot \vec{EC} + DA^2$$

cos de sens +

$$2) \vec{EA} \cdot \vec{EB} = -ED \cdot EC + DA^2$$

$$= -1 \times 4 + 9 = 5$$

$$3) \text{ OR } \boxed{\vec{EA} \cdot \vec{EB} = EA \times EB \times \cos(\widehat{BEA})} \quad \textcircled{*}$$

$$\text{Pyth de EDA: } EA^2 = ED^2 + DA^2$$

$$= 1 + 9 = 10 \quad EA = \sqrt{10}$$

$$\text{Pyth de ECB: } EB^2 = EC^2 + CB^2$$

$$= 16 + 9 = 25 \quad EB = 5$$

$$\text{Ainsi } \textcircled{*} \text{ devient } 5 = \sqrt{10} \times 5 \times \cos(\widehat{BEA})$$

$$\cos(\widehat{BEA}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{dc } \widehat{BEA} \approx 72^\circ$$

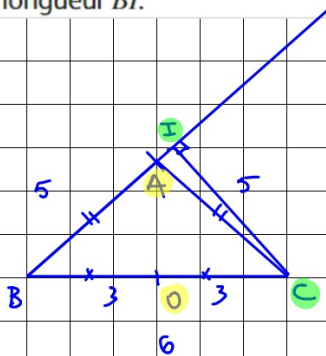
54 ABC est un triangle isocèle en A tel que :

$$AB = 5 \text{ et } BC = 6$$

O est le milieu du segment $[BC]$.

1. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

2. On note I le projeté orthogonal de C sur (AB) .
Calculer la longueur BI .



1) ABC isocèle en A de le milieu de $[BC]$ est
le projeté orth de A sur (BC) .

$$\begin{aligned}\vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \vec{BO} \cdot \vec{BC} \\ &= BO \times BC \\ &= 3 \times 6 = 18.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \vec{BA} \cdot \vec{BI} \\ &= BA \times BI \\ \text{dc } 18 &= 5 \times BI \\ \text{et } BI &= \frac{18}{5}.\end{aligned}$$

